**Лабораторная работа № 4**

**Решение нелинейных уравнений и их систем**

Постановка задачи: требуется найти все корни уравнения

1 этап – отделение (локализация) корней: аналитически / таблично / графически определяем подотрезки, содержащие ровно один корень (смена знака функции говорит о том, что отрезок содержит нечетное количество корней) и грубо оценить значение корня в этом подотрезке.

2 этап – уточнение значений выбранного корня каким-нибудь численным методом.

NB: В ЧМ невозможно сразу найти все корни, нужно подбирать метод или данные для метода по отдельности для каждого корня. Методы всегда итерационные, т.е. состоят из алгоритма, который будет повторяться до тех пор, пока погрешность не достигнет нужного значения. В результате всегда получается приближенное решение (последовательность приближений, где последнее приближение берется за решение).

Метод бисекции (метод дихотомии,   
метод половинного деления)

Задается допустимая погрешность решения.

1. делим пополам и выбираем ту половину, где функция меняет знак
2. Вычисляем длину нового отрезка; если эта длина меньше, чем то останавливаем расчет и за приближенное значение корня берется середина полученного отрезка. В противном случае повторяем процедуру деления пополам.

Приближенное решение – середина последнего отрезка.

Метод простых итераций

Суть заключается в том, что исходное уравнение заменяем эквивалентным (таким уравнением, которое на заданном отрезке имеет тот же корень)

Задается допустимая погрешность решения и начальное приближение .

Дальнейшие приближения вычисляются по итерационному процессу

Вычисления производятся до тех пор, пока

Последнее вычисленное приближение берется за решение уравнения.

Критерий сходимости: Последовательность приближений сходится при любом начальном приближении тогда и только тогда, когда

Как выбирать ?

1. Выразить из исходного уравнения
2. – знакопостоянная на функция (часто – константа)

Метод Ньютона (метод касательных)

Задается допустимая погрешность решения и начальное приближение .

Дальнейшие приближения вычисляются по итерационному процессу (выводится из уравнения касательной)

Вычисления производятся до тех пор, пока

Последнее вычисленное приближение берется за решение уравнения.

Критерий сходимости: Последовательность приближений сходится при любом начальном приближении тогда и только тогда, когда

Метод секущих

Модификация метода Ньютона, получается, если заменить производную на разделенную разность.

Задается допустимая погрешность решения и два начальных приближения и

Дальнейшие приближения вычисляются по итерационному процессу

Вычисления производятся до тех пор, пока

Последнее вычисленное приближение берется за решение уравнения.

Метод хорд

Задается допустимая погрешность решения и два начальных приближения и , фиксируется.

Дальнейшие приближения вычисляются по итерационному процессу

Вычисления производятся до тех пор, пока

Последнее вычисленное приближение берется за решение уравнения.

Постановка задачи для систем: Дана система нелинейных уравнений

Требуется найти точку пересечения всех кривых.

NB: Для систем нелинейных уравнений используются обобщения метода простых итераций и метода Ньютона

Метод простых итераций

Заменяем исходную систему эквивалентной

Задается допустимая погрешность решения и начальное приближение .

Итерационный процесс:

Условие остановки:

Критерий сходимости:

NB: Нормы вектора и матрицы:

Метод Ньютона

Обобщение «в лоб»:

– такой способ затратный и чреват большими погрешностями, т.к. придется считать обратную матрицу для матрицы Якоби.

*Другой способ:*

Пусть есть приближение и следующее приближение вычисляется как

Тогда, если – решение, то

Разложим функцию в ряд Тейлора в точке и ограничимся первыми двумя слагаемыми

Тогда мы получим СЛАУ на неизвестный вектор

На каждой итерации вычисляется решение такой СЛАУ, затем новое приближение считается как

Условие остановки:

NB: Если в матрице Якоби производные заменить конечными разностями, т.е.

то получим метод Ньютона – Бройдена.